REBUPLIQUE TUNISIENNE

EXAMEN DE BACCALAURÉAT

SESSION DE JUIN 2018

SECTION : ECONOMIE ET GESTION

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES **DUREE : 2 h** **COEFFICIENT : 2**

SESSION PRINCIPALE

Exercice 1 : (5 points)

1) Ce graphe est connexe car tous les sommets peuvent être reliés entre eux par (au moins) une chaine. Par exemple, la chaîne ABCFED contient tous les sommets.

2)

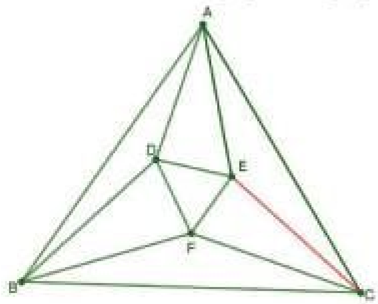
Sommet	A	B	C	D	E	F
degré	4	4	3	4	3	4

Puisque deux sommets exactement, C et E, sont de degré impair et que les autres sont de degré pair, le théorème d'Euler nous permet d'affirmer l'existence d'une telle chaîne eulérienne.

Exemple : C –B – F – D – B – A – C – F – E – D – A – E.

3) a) Ce graphe contient au moins un sommet de degré impair deg(C) =3 donc il n'admet pas un cycle Eulérien.

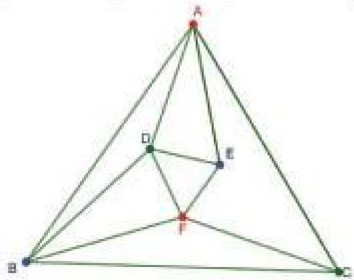
b) On ajoute un arrête reliant E et C ainsi les sommets du graphe de degré pair il admet alors un cycle Eulérien.



4) $\gamma(G)$ Le nombre chromatique est supérieur .

Le sommet ayant le plus grand degré est le sommet A, de degré 4. Le cours nous affirme qu'alors $\gamma(G) \leq 4+1$, c'est-à-dire $\gamma(G) \leq 5$. De plus, le sous-graphe FCTD, d'ordre 3, étant complet, on aura $\gamma(G) \geq 3$ (il faudra au moins 3 couleurs pour le colorier). Ainsi $3 \leq \gamma(G) \leq 5$

Sommet	A	B	D	F	C	E
degré	4	4	4	4	3	3
couleur	Couleur1	Couleur 2	Couleur 3	Couleur1	Couleur 3	Couleur 2



Donc $\gamma(G) = 3$

5) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & \boxed{5} & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ donc il y a 5 chaines de longueur 3 reliant C et E.

C-F-D-E ; C-A-D-E ; C-B-A-E ; C-B-F-E et C-B-D-E

Exercice 2 : (5 points)

Soit la suite définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = 800 \\ u_{n+1} = 0,7u_n + 300 \end{cases}$

1) a) Pour n = 1, $u_1 = 800$ donc $u_1 \leq 1000$ vrai pour n = 1.

Supposons que $u_n \leq 1000$ et démontrons que $u_{n+1} \leq 1000$

$u_n \leq 1000 \Leftrightarrow 0,7u_n \leq 0,7 \times 1000 \Leftrightarrow 0,7u_n \leq 700 \Leftrightarrow 0,7u_n + 300 \leq 1000$

D'où $u_{n+1} \leq 1000$.

D'où pour tout entier naturel non nul n $u_n \leq 1000$

b) $u_{n+1} - u_n = 0,7u_n + 300 - u_n = -0,3u_n + 300$ or $u_n \leq 1000 \Leftrightarrow -0,3u_n \geq -300 \Leftrightarrow -0,3u_n + 300 \geq 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ d'où (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1000 donc elle est convergente.

2) a) $v_n = 1000 - u_n$

$v_{n+1} = 1000 - u_{n+1} = 1000 - 0,7u_n - 300 = 700 - 0,7u_n = 0,7(1000 - u_n) = 0,7v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$

b) $v_n = q^{n-1}v_1$ or $v_1 = 1000 - u_1 = 1000 - 800 = 200$ d'où $v_n = 200 \times (0,7)^{n-1}$

c) $v_n = 1000 - u_n \Leftrightarrow u_n = 1000 - v_n = 1000 - 200 \times (0,7)^{n-1} = 200\left(5 - (0,7)^{n-1}\right)$

On note $u_1 = 800$ le nombre de clients lors du 1er mois

Si u_n le nombre de clients lors du nième mois alors $u_{n+1} = 0,7u_n + 300$ donc $u_n = 200\left(5 - (0,7)^{n-1}\right)$

$$u_n > 990 \Leftrightarrow 200\left(5 - (0,7)^{n-1}\right) > 990 \Leftrightarrow 5 - (0,7)^{n-1} > \frac{99}{20} \Leftrightarrow 0,05 > (0,7)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,05) > (n-1)\ln(0,7) \Leftrightarrow n - 1 > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)} + 1$$

D'où $n > 9,3990$ et par suite a partir de 10ème mois

Exercice 3 : (4 points)

Année	1964	1974	1984	1994	2004	2014
Rang Xi	1	2	3	4	5	6
Effectif Yi (en millions)	1,8	2,7	3,6	5,4	6,4	7,4

1) a)

b) La silhouette du nuage de points est étirée dans une direction, un ajustement affine entre Y et X est envisageable

2) $\overline{X}=3,5$ et $\overline{Y}=4,55$ donc $G(3,5\ ;\ 4,55)$

3) a) voir figure.

b) $(GP): y=ax+b$ avec $a=\dfrac{y_P-\overline{Y}}{x_P-\overline{X}}=\dfrac{6,4-4,55}{5-3,5}=1,23$

$b=\overline{Y}-a\times\overline{X}=4,55-a\times 3,5=0,233$ donc $(GP): y=1,23x+0,233$

c) Le rang de l'année 2034 est $x=8$ La population de la Tunisie en milieux urbains est

$y=1,23\times 8+0,23=10,07$ millions

Exercice 4 : (6,5 points)

1) $x\in[0,+\infty[, g(x)=1-xe^{x}$

x	0		α		+∞
g(x)		+	0	−	

2) $x\in[0,+\infty[,\ f(x)=x+(1-x)e^{x}$

a) $x\in[0,+\infty[,\ f'(x)=1-e^{x}+(1-x)e^{x}=1+(-1+1-x)e^{x}=1-xe^{x}=g(x)$

b) $f(x)=x+(1-x)e^{x}=x\left(1+\dfrac{(1-x)e^{x}}{x}\right)=x\left(1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)e^{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\underbrace{\left(\frac{1}{x}-1\right)}_{-1}\underbrace{e^{x}}_{+\infty}\right)=-\infty$$

c) $f(\alpha)=\alpha+(1-\alpha)e^{\alpha}$ or $g(\alpha)=0\Leftrightarrow 1-\alpha e^{\alpha}=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ donc $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{(1-\alpha)}{\alpha}=\dfrac{\alpha^{2}-\alpha+1}{\alpha}$

3) $\text{signe}(f'(x))=\text{signe}(g(x))$

x	0		α		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	1	↗	f(α)	↘	−∞

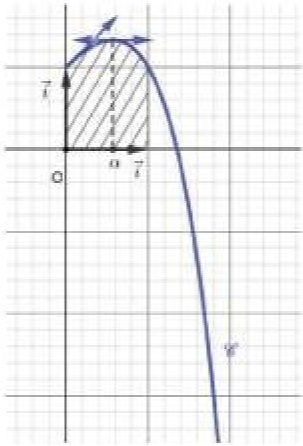
4) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{x}\right)=-\infty$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

b) $T: y=f'(0)x+f(0)$ et $x\geq 0$

$T: y=x+1$ et $x\geq 0$

c)



5) a) F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$$F'(x)=-e^x+(2-x)e^x+x=x+(-1+2-x)e^x=x+(1-x)e^x=f(x)$$

b) $A=\int_0^1 f(x)\ dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=e+\frac{1}{2}-2=e-\frac{3}{2}$